29. června

1 část

1. Pomocí Taylorova mnohočlenu druhého stupně vypočtěte hodnotu $\sqrt{101}$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad x_0 = 100 \quad h = 1 \quad f(x_0) = 10$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad f'(x_0) = \frac{1}{20}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} \quad f''(x_0) = -\frac{1}{4000}$$
$$\sqrt{101} \doteq 10 + \frac{1}{20} \cdot 1 - \frac{1}{4000} \cdot 1^2 = \frac{40199}{4000} = 10\frac{199}{4000}$$

2. Určete Taylorův mnohočlenu třetího stupně pro gunkci $f: \ y = \operatorname{tg} x$ se středem v bodě $\pi/4$. (Mocniny příslušného lineárního dvojčlenu neroznásobujte. Koeficienty nesmí obsahovat neurčené hodnoty goniometrických funkcí.)

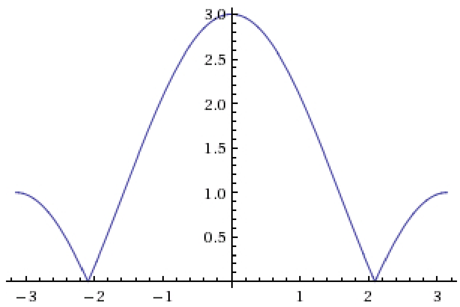
$$f(x) = \operatorname{tg} x \quad f(x_0) = 1$$
$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \quad f'(x_0) = 2$$
$$f''(x) = \frac{-2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \quad f''(x_0) = 4$$
$$f'''(x) = \frac{2\cos x \cos^3 x - 2\sin x 3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\cos^6 x} = \frac{2 + 4\sin^2 x}{\cos^4 x} \quad f'''(x_0) = 16$$
$$\operatorname{tg} x \doteq 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$$

3. Určete první dva členy s nenulovými koeficienty v Maclaurinově vzorci pro každou z funkcí $f(x) = \sqrt{1 - 12x^3}$, $g(x) = \sin 6x \cdot \ln(1 - 2x)$. (Koeficienty musí být vyjádřeny bez faktoriálů a kombinačních čísel.)

$$f(x) = \sqrt{1 - 12x^3} = (1 - 12x^3)^{\frac{1}{2}}$$
$$(1 + x)^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \binom{1/2}{1} x = 1 + \frac{1}{2}x$$
$$(1 - 12x^3)^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{1}{2}(-12x^3) = 1 - 6x^3$$

$$g(x) = \sin 6x \cdot \ln(1 - 2x)$$
$$\sin x \doteq x - \frac{x^3}{3!} = x - \frac{x^3}{6}$$
$$\sin 6x \doteq 6x - \frac{(6x)^3}{6} = 6x - 36x^3$$
$$\ln(1 + x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$$
$$\ln(1 - 2x) \doteq -2x - \frac{(-2x)^2}{2} = -2x - 2x^2$$
$$\sin 6x \cdot \ln(1 - 2x) \doteq (6x - 36x^3) \cdot (-2x - 2x^2) \doteq -12x^2 - 12x^3$$

4. K funkci $f(x) = |1 + 2\cos x|$ sestavte horní a dolní integrální součet na intervalu $\langle -\pi; \pi \rangle$ pro dělení tvořené dělicími body $-\pi, 0, \pi/2, \pi$.



Pro horní součet hledáme největší hodnoty na dělících intervalech:
na $\langle -\pi, 0 \rangle$ v 0 je to 3
na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ v 0 je to 3
na $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ v $\frac{\pi}{2}$ je to 1
Horní součet $S = 3 \cdot \pi + 3 \cdot \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi$

Pro dolní součet hledáme nejmenší hodnoty:
na $\langle -\pi, 0 \rangle$ v $-\frac{2}{3}\pi$ je to 0
na $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ v $\frac{\pi}{2}$ je to 1
na $\left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle$ v $\frac{2}{3}\pi$ je to 0
Dolní součet $s = 0 \cdot \pi + 1 \cdot \frac{\pi}{2} + 0 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

5. Udejte příklad funkce $f : \langle 0, 1 \rangle \to \mathbb{R}$, jejíž dolní a horní integrály přes interval $\langle 0, 1 \rangle$ mají po řadě hodnoty 2 a 4.

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \in \mathbb{Q} \\ 4 & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

6. Vypočtěte $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\ \mathrm{d}x$

$$\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{|x|}\ \mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = 2\int\limits_{0}^{1} x^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x = 2\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

7. Pomocí funkce F, jež je primitivní k funkci f na intervalu $I = (0, \infty)$, zapiště příklad funkce G primitivní na I k funkci g, je-li funkce g určena předpisem $g(x) = 2f(x) + f(2x)$ pro každé $x \in I$.

$$\int g(x)\ \mathrm{d}x = \int [2f(x) + f(2x)]\ \mathrm{d}x = 2F(x) + \frac{1}{2}F(2x) + c$$

$$G(x) = 2F(x) + \frac{1}{2}F(2x)$$

8. K funkci $f(x) = 8\sin^3 2x \cos 2x$ určete jednu primitivní funkci na $(-\infty, +\infty)$.

$$\int 8\sin^3 2x \cos 2x \ \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl} t & = & \sin 2x \\ \mathrm{d}t & = & 2\cos 2x \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int 4t^3 \ \mathrm{d}t = t^4 + c = \sin^4 2x + c$$

$$F(x) = \sin^4 2x$$

9. Zapište jedním integrálem obsah omezeného rovinného útvaru, jehož hranice je tvořena částmi křivek $x = y^2 + 2y + 2$ a $x + 2y + 1 = 0$ (integrál nepočítejte).

$$x = y^2 + 2y + 2 \qquad x = -2y - 1$$

$$\begin{array}{rcl} x & = & x \\ y^2 + 2y + 2 & = & -2y - 1 \\ y^2 + 4y + 3 & = & 0 \\ (y+3)(y+1) & = & 0 \\ y_1 = -3 & & y_2 = -1 \\ (-2)^2 + 2(-2) + 2 = 2 & & -2(-2) - 1 = 3 \end{array}$$

$$S = \int\limits_{-3}^{-1} \left[(-2y - 1) - \left(y^2 + 2y + 2\right)\right] \ \mathrm{d}y = \int\limits_{-3}^{-1} \left(-y^2 - 4y - 3\right) \ \mathrm{d}y$$

10. Určete neznámé číslo a a neznámou (spojitou) funkci f, které splňují rovnici $\int\limits_0^x f(t) \ \mathrm{d}t = 2x + \cos x + a$ pro každé $x \in \mathbb{R}$.

$$f(t) = (2t + \cos t + a)' = 2 - \sin t$$

$$\int\limits_0^x (2 - \sin t) \ \mathrm{d}t = [2t + \cos t]_0^x = 2x + \cos x - 1 = 2x + \cos x + a \Rightarrow a = -1$$

2 část

1. Určete

$$\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$$

$$\frac{3}{x^3-1} = \frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$3 = A(x^2+x+1) + Bx(x-1) + C(x-1)$$

$$\begin{aligned} x^2: \quad 0 &= A+B && (1)\\ x: \quad 0 &= A-B+C && (2)\\ x^0: \quad 3 &= A-C && (3) \end{aligned}$$

$$(1)+(2)+(3):\ 3 = 3A \implies A = 1 \Rightarrow B = -1, C = -2$$

$$\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{x^3-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = I$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}\right) + c = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

$$I = \ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

2. Vypočtěte (ve výsledku nevyčíslujte $\pi, \ln 2, \ln 3$)

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(2-\sin x)\,\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rcl rcl rcl} t &=& \operatorname{tg}\frac{x}{2} & \sin x &=& \frac{2t}{1+t^2} & 0 &\to& 0 \\ x &=& 2\operatorname{arctg} t & \cos x &=& \frac{1-t^2}{1+t^2} & \frac{\pi}{2} &\to& 1 \\ \mathrm{d}x &=& \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} & & & & & & \end{array} \right| =$$

$$\int\limits_0^1 \frac{2-\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int\limits_0^1 \frac{\frac{2+2t^2-2t}{1+t^2}}{\frac{2+2t^2+1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int\limits_0^1 \frac{4t^2-4t+4}{(t^2+1)(t^2+3)}\,\mathrm{d}t = I$$

$$\frac{4t^2-4t+4}{(t^2+1)(t^2+3)} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{t^2+3}$$

$$4t^2-4t+4 = At(t^2+3) + B(t^2+3) + Ct(t^2+1) + D(t^2+1)$$

$$x^3: \quad 0 = A + C \tag{1}$$

$$x^2: \quad 4 = B + D \tag{2}$$

$$x: \quad -4 = 3A + C \tag{3}$$

$$x^0: \quad 4 = 3B + D \tag{4}$$

$$(3)-(1): \; -4 = 2A \implies A = -2 \Rightarrow C = 2$$

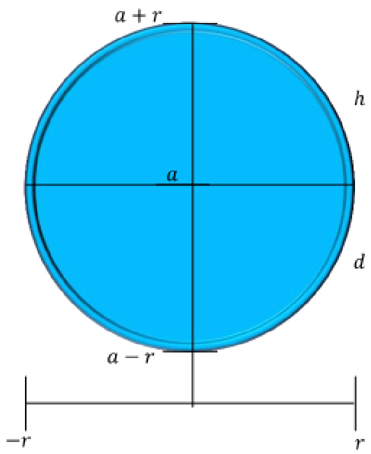
$$(4)-(2): \; 0 = 2B \implies B = 0 \Rightarrow D = 4$$

$$I = -\int\limits_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \frac{2t+4}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \frac{2t}{t^2+3}\,\mathrm{d}t + 4\int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+3} =$$

$$-\left[\ln(t^2+1)\right]_0^1 + \left[\ln(t^2+3)\right]_0^1 + \frac{4}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = -\ln 2 + \ln 4 - \ln 3 + \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} =$$

$$-\ln 2 + 2\ln 2 - \ln 3 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \ln 2 - \ln 3 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

3. Rovinný útvar U je určen nerovnicí $x^2+(y-a)^2 \leq r^2$, kde $a > r > 0$ jsou daná čísla. Vyjádřete objem tělesa, které vznikne z útvaru U rotací kolem osy x.
Návod: Hledaný objem je rozdílem objemů dvou rotačních těles, tedy rozdíl dvou integrálů, které před výpočtem slučte do jednoho integrálu.



Hranice:

$$(y-a)^2 = r^2 - x^2$$

Horní hranice:

$$\begin{aligned} y-a &= \sqrt{r^2-x^2} \\ h(x) &= a+\sqrt{r^2-x^2} \\ h^2(x) &= a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2 \end{aligned}$$

Dolní hranice:

$$\begin{aligned} y-a &= -\sqrt{r^2-x^2} \\ d(x) &= a-\sqrt{r^2-x^2} \\ d^2(x) &= a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2 \end{aligned}$$

$$V=\pi\int_{-r}^{r}\left[h^2(x)-d^2(x)\right]\,\mathrm{d}x=\pi\int_{-r}^{r}\left[\left(a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)-\left(a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2\right)\right]\,\mathrm{d}x=$$

$$\pi\int_{-r}^{r}4a\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{rcl rcl} x &=& r\sin t & -r &\to& -\frac{\pi}{2} \\ \mathrm{d}x &=& r\cos t\,\mathrm{d}t & r &\to& \frac{\pi}{2} \end{array}\right|=4\pi a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\cdot\cos t\,\mathrm{d}t=$$

$$4\pi ar\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=8\pi ar\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{rcl rcl} y &=& \operatorname{tg} t & \cos &=& \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \\ t &=& \operatorname{arctg} y & -\frac{\pi}{4} &\to& -1 \\ \mathrm{d}t &=& \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} & \frac{\pi}{4} &\to& 1 \end{array}\right|=8\pi ar\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^2}=I$$

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^2}=J_2(y,1)=\frac{y}{2(y^2+1)}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}y}{y^2+1}=\frac{y}{2(y^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} y$$

$$I=8\pi ar\left[\frac{y}{2(y^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} y\right]_{-1}^{1}=8\pi ar\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\frac{\pi}{4}\right)=4\pi ar+2\pi^2 ar$$